BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÁI NGUYÊN

ĐỖ THỊ NGỌC

CÁC TẬP SONG XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CHO ĐẠO HÀM CỦA HÀM PHÂN HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÁI NGUYÊN

ĐỖ THỊ NGỌC

CÁC TẬP SONG XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CHO ĐẠO HÀM CỦA HÀM PHÂN HÌNH

Chuyên nghành: **Toán giải tích**

Mã số: **60 46 01 02**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **PGS.TS. Hà Trần Phương**

Thái Nguyên - 2017

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan Luận văn là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn trực tiếp của PGS.TS. Hà Trần Phương.

Trong quá trình nghiên cứu, tôi đã kế thừa thành quả khoa học của các nhà khoa học với sự trân trọng và biết ơn.

Lời cám ơn

Em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới thầy giáo hướng dẫn PGS.TS. Hà Trần Phương. Thầy đã giao đề tài và tận tình hướng dẫn em trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Nhân dịp này em xin gửi lời cám ơn của mình tới Ban Giám Hiệu trường Đại học Sư Phạm Thái Nguyên cùng toàn bộ các thầy cô giáo trong Khoa Toán- Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Viện Toán học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội và Phòng Sau Đại học đã giảng dạy và giúp đỡ chúng em trong suốt quá trình học tập tại đây, đồng thời tôi xin cảm ơn các bạn trong lớp cao học K23 Toán Giải Tích đã nhiệt tình giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại lớp.

Bản luận văn chắc chắn không thể tránh được nhiều thiếu xót, rất mong được quý thầy cô và các bạn quan tâm, góp ý.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2017

Tác giả

Đỗ Thị Ngọc

Mục lục

Một số ký hiệu

$m\,(r, f)$	hàm xấp xỉ.
$N\,(R, f)$	hàm đếm.
$T(R, f)$	hàm đặc trưng.
$E_f\,(a)$	tập các 0-điểm của $f - a$ kể cả bội.
$\overline{E}_f\,(a)$	tập các 0-điểm của $f - a$ không kể bội.
$E_k\,(a; f)$	tập tất cả các không điểm của f.
$N(r, a; f\mid = 1)$	hàm đếm các a-điểm đơn của f.
$N\,(r, a; f\mid \leqslant m)$	hàm đếm các a-điểm của f với bội không lớn hơn m.
$N\,(r, a; f\mid \geqslant m)$	hàm đếm các a-điểm của f với bội không nhỏ hơn m.
$\overline{N_*}\,(r, a; f, g)$	hàm đếm rút gọn các a-điểm của f.
$e.v.P.$	giá trị bỏ được Picard.
$BURSDM$	song xác định duy nhất cho đạo hàm của hàm phân hình.

Mở đầu

Như một ứng dụng quan trọng của lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna, các công trình về vấn đề duy nhất cho hàm phân hình luôn thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới. Những công trình này được khởi nguồn từ định lý 5 điểm của Nevanlinna và ngày càng có nhiều công trình được công bố dưới nhiều hình thức khác nhau. Kí hiệu:

$$E_f(S) = \bigcup_{a \in S} \big\{(z, m) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^* : f(z) - a = 0 \text{ và } \mathrm{ord}_{f-a}(z) = m\big\}$$

và

$$\overline{E}_f(S) = \bigcup_{a \in S} \{z : f(z) - a = 0\}.$$

Ta nói hai hàm phân hình f và g chung nhau tập S kể cả bội (không kể bội) nếu $E_f(S) = E_g(S)$ $\big(\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)\big)$. Ta nói cặp tập hợp (S, T) là song xác định duy nhất cho các hàm phân hình kể cả bội (không kể bội) nếu điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$ và $E_f(T) = E_g(T)$ (hoặc $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$ và $\overline{E}_f(T) = \overline{E}_g(T)\big)$ kéo theo $f \equiv g$. Vấn đề đặt ra là với những điều kiện như thế nào của cặp tập hợp (S, T) để chúng là song xác định duy nhất cho đạo hàm của hàm phân hình (kể cả bội hoặc không kể bội). Những kết quả theo hướng này liên quan đến các công trình của A. Banerjee và S. Mallick ([4]), P. Bhattacharjee ([2]), M.Fang ([5]), W. C. Lin, H. X. Yi ([9]) và nhiều tác giả khác.

Với mong muốn tìm hiểu các kết quả nghiên về các tập song xác định duy nhất cho đạo hàm của hàm phân hình. Chúng tôi lựa chọn đề tài: **"Các tập song xác định duy nhất cho đạo hàm của hàm phân hình"**. Mục đích của đề tài là trình bày một số kết quả nghiên cứu về các tập song xác định duy nhất cho đạo hàm của hàm phân hình. Cụ thể là kết quả của A. Banerjee và S. Mallick ([4]) về tập song xác định duy nhất cho đạo hàm của hàm phân hình. Luận văn được bố cục cùng với lời nói đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Phân bố giá trị cho hàm phân hình. Chương này chúng tôi trình bày về các hàm Nevanlinna, hai định lý cơ bản của lý thuyết Nevanlinna và một số tính chất về phân bố giá trị của hàm phân hình đối với đạo hàm. Đây là những kiến thức cơ bản sử dụng để chứng minh các kết quả trong Chương 2.

Chương 2: Các tập song xác định duy nhất cho đạo hàm của hàm phân hình. Trình bày hàm phân hình chung nhau giá trị hoặc tập hợp, về tập song xác định duy nhất cho đạo hàm của hàm phân hình.

Chương 1

Phân bố giá trị cho hàm phân hình

1.1. Hàm đặc trưng và tính chất

Các hàm Nevanlinna.

Cho f xác định trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, lấy giá trị trên $\overline{\mathbb{C}}$,$D \subset C$ là một miền. Ta nói f chỉnh hình tại $z_0 \in \mathbb{C}$ nếu tồn tại một lân cận U của z_0 sao cho

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Với mọi $z \in U$, trong đó $c_n \in \mathbb{C}$ là các hằng số. Hàm $f(z)$ được gọi là *chỉnh hình* trên D nếu nó chỉnh hình tại mọi $z \in D$.

Với hàm $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$, một điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ được gọi là *điểm bất thường cô lập* của hàm $f(z)$ nếu $f(z)$ chỉnh hình trong một lân cận nào đó của z_0 trừ ra tại chính z_0. Điểm bất thường cô lập z_0 của hàm $f(z)$ được gọi là:

i) Điểm bất thường khử được của hàm $f(z)$ nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

ii) Cực điểm của hàm $f(z)$ nếu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

iii) Cực điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$ nếu không tồn tại $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Định nghĩa 1.1. Hàm $f(z)$ được gọi là *hàm nguyên* nếu nó chỉnh hình trong toàn mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.2. Điểm z_0 được gọi là 0–điểm cấp $m \geqslant 0$ của hàm $f(z)$ nếu trong lân cận của z_0, hàm $f(z)$ có biểu diễn $f(z) = (z - z_0)^m.h(z)$, trong đó $h(z)$ chỉnh hình trong lân cận của z_0 và $h(z_0) \neq 0$. Điểm z_0 được gọi là cực điểm cấp $m \geqslant 0$ của hàm $f(z)$ nếu z_0 là 0-điểm cấp m của hàm $\frac{1}{f(z)}$.

Với hàm phân hình f, ta kí hiệu:

$$\mathrm{ord}_f(z_0) = \begin{cases} m & \text{nếu } z_0 \text{ là 0-điểm cấp } m \text{ của } f(z) \\ 0 & \text{nếu } f(z_0) \neq 0, \infty \\ -m & \text{nếu } z_0 \text{ là cực điểm cấp } m \text{ của } f(z). \end{cases}$$

Định nghĩa 1.3. Hàm số $f(z)$ được gọi là *hàm phân hình* trong miền $D \subset \mathbb{C}$ nếu nó chỉnh hình trong miền D, trừ ra tại một số điểm bất thường là cực điểm. Khi đó $f(z)$ là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, ta gọi đơn giản là hàm phân hình.

Nhận xét: Nếu $f(z)$ là hàm phân hình trên D thì trong mỗi lân cận của $z \in D$ hàm $f(z)$ biểu diễn được dưới dạng thương của hai hàm chỉnh hình.

Bây giờ ta định nghĩa hàm đếm, hàm xấp xỉ và hàm đặc trưng Nevanlinna của một hàm phân hình.

Với mỗi số thực dương $x \in \mathbb{R}^*{}_+$.